1. Пусть ω^k дифференциальная k-форма в R^n. Доказать, что $d\omega^k = 0$ тогда и только тогда, когда для любого компактного ориентируемого дифференцируемого $(k+1)$-мерного многообразия $M \subset R^n$ справедливо равенство $\int\limits_{\partial M} \omega^k = 0$.

2. Пусть ориентируемое замкнутое многообразие M состоит из k компонент связности. Сколько различных ориентаций можно задать на M?

3. Пусть $f_i \in C^1(R^n)$ и система уравнений $f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_k(x) = 0$ $k < n$, задающая множество решений M имеет полный ранг во всех точках $x \in M$. Докажите, что M — ориентируемое многообразие.

4. Пусть L — лист Мёбиуса. Рассмотрим "толстый лист Мёбиуса" $M(\varepsilon) = \cup_{x \in L} B(x, \varepsilon)$. Докажите, что $\partial M(\varepsilon)$ — ориентируемое многообразие.

5. Пусть ω^{2k} - дифференциальная $2k$-форма в R^n. Докажите, что форма $\omega^{2k} \wedge d\omega^{2k}$ является точной.

6. Известно, что уравнение $\triangle u(x, y, z) = f(x, y, z)$ имеет решение для любой финитной функции $f \in C^1(R^3)$. Доказать, что любое финитное векторное поле $\overline{a} : R^3 \to R^3$ можно представить в виде суммы $\overline{a} = grad(g) + rot(\overline{u})$.

7. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_k$ дифференциальные 1-формы в R^n, $k < n$ и $\Omega = \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k$. Докажите эквивалентность условий

a) Для всех i $d\omega_i = \sum_j \lambda_{ij} \wedge \omega_j$, где λ_{ij} — некоторые 1-формы.

b) $d\Omega = \lambda \wedge \Omega$, где λ — некоторая 1-форма.

c) Для всех i $d\omega_i \wedge \Omega = 0$.

8. Пусть $S = \{z = -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + c^2, z \geq 0\}$. Докажите, что $\int\limits_S\int \frac{cos(\overline{r}, \overline{n})}{||r||^2} dH^2 = 2\pi$.

9. Пусть $\varphi, \psi : R^m \to R^n \in C^1$, ω^k — дифференциальная k-форма в R^n, $M \subset R^m$ — компактное ориентируемое дифференцируемое k-мерное многообразие, $k \leq m \leq n$. Пусть для всех $x \in M$ $\varphi(x) = \psi(x)$, докажите равенство $\int\limits_{\partial M} \varphi^* \omega^k = \int\limits_{\partial M} \psi^* \omega^k$.

10.Пусть S — сфера в R^3 с центром в точке 0, $C \subset S$ — замкнутый контур класса C^1, $\overline{n}(x)$ — вектор нормали к C касательный к S, $\overline{r} = (x, y, z)$. Докажите, что $\int\limits_C \overline{n}(x) \times \overline{r}\, dH^1 = 0$.

11. Пусть $U \subset R^3$ — открытое множество и ∂U — дифференцируемое многообразие. Пусть для каждого $x \in U$ $div\overline{a}(x) = 0$ и для каждого $x \in \partial U$ $(\overline{a}(x), \overline{n}(x)) = 0$, где $\overline{n}(x)$ — нормаль к ∂U. Докажите равенство $\int\int\limits_U\int \overline{a} d\mu = 0$.

12. Пусть $C = \{(x(t), y(t), z(t))\}$ простой замкнутый контур класса C^1, не охватывающий ось x, такой что если $x(t_1) = x(t_2)$, то $y^2(t_1) + z^2(t_1) \neq y^2(t_2) + z^2(t_2)$. Доказать, что объём тела, полученного вращением контура C вокруг оси x равен $\pi|\int\limits_C (y^2 + z^2) dx|$.