1. Пусть $f : R \to R$ неубывающая функция. Докажите, что мера заданная соотношением $\Phi((a,b)) = f(b) - f(a)$ абсолютно непрерывна, тогда и только тогда, когда функция f абсолютно непрерывна.

2. Докажите, что если борелевские множества μ-измеримы по Каратеодори, то внешняя мера μ аддитивна на удалённых множествах.

3. Докажите, что если найдётся $\sigma > 0$, для которого $H^n_\sigma(A) = 0$, то $H^n_\delta(A) = 0$ для всех $\delta > 0$.

4. Докажите, что если $A \subset R^n$ и $|A| = 0$ ($|\cdot|$ — внешняя мера Лебега), то и $H^n(A) = 0$.

5. Приведите пример множества бесконечной размерности по Хаусдорфу.

6. Докажите, что не существует липшицева отображения из $(0,1)$ на $(0,1)^2$.

7. Пусть $H_A(\varepsilon)$ — натуральный логарифм мощности минимальной ε-сети множества A и $\kappa(A)$ — размерность множества A по Хаусдорфу. Докажите неравенство $\liminf\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{H_A(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \geq \kappa(A)$. Приведите пример множества для которого неравенство строгое.

8. Найдите размерность по Хаусдорфу канторова множества.

9. Приведите пример несчётного множества, которое имеет нулевую размерность по Хаусдорфу.

10. Пусть M — множество изометрий пространства R^3, естественным образом вложенное в R^9. Найдите κ — его размерность по Хаусдорфу и $H^\kappa(M)$.

11. Пусть C — кривая класса C^1 в R^k, такая что для касательного вектора $\overline{\tau}$ в произвольной точке кривой справедливы равенства $(\overline{\tau}, \overline{e_i}) \geq 0$, для всех ортов $\overline{e_i}$. Докажите, что $H^1(C) \leq \sqrt{k}||E - B||$, где B, E — начало и конец кривой C.

12. Пусть кривая $y = f(x) \in C^1[a,b]$ вращением вокруг оси x порождает поверхность S. Докажите, что $H^2(S) = 2\pi \int_a^b |f(t)|\sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$.

13. Пусть $S = \partial B$ — сфера в R^3 единичного радиуса, $U \subset S$ — область на сфере S, M — конус с вершиной в центре шара B, вырезаемый из B областью S. Докажите равенство $H^3(M) = \frac{1}{3}H^2(U)$.

14. Пусть $M \subset R^n$ — компактное многообразие размерности $n-1$ класса C^1. Рассмотрим его "утолщение"$M_\varepsilon = \cup_{x\in M} B(x,\varepsilon)$. Докажите равенство $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{H^n(M_\varepsilon)}{2\varepsilon} = H^{n-1}(M)$.