

1. Докажите, что ядра Фейера  $F_n(x) = \frac{\chi(x)_{[-\pi, \pi]}}{(n+1)} \sum_{k=0}^n D_k(x)$ , где  $D_k(x) = \frac{\sin(k+1/2)x}{2\pi \sin(x/2)}$  — ядра Дирихле, образуют  $\Delta$ -образную последовательность.
2. Докажите, что если  $f \in C(\mathbb{R})$  —  $2\pi$ -периодическая функция, то  $f * F_n \rightrightarrows f$  при  $n \rightarrow \infty$  на  $\mathbb{R}$ .
3. Докажите, что первообразная ядра Дирихле ограничена, т. е.  $|\int_0^x D_n(t) dt| < C$ .
4. Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая абсолютно непрерывная функция. Докажите, что ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней всюду.
5. Докажите, что частичные суммы ряда  $\sum_{k=1}^n \frac{\sin(kx)}{k}$  ограничены константой, независимой от  $x$ .
6. Пусть  $S_n(x)$  — частичные суммы ряда Фурье для функции  $\operatorname{sgn}(x)$ . Докажите, что  $\limsup_{x \rightarrow x+0} S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx \approx 1,179$ .
7. Пусть  $f \in C^1(\mathbb{R})$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $a_n, b_n$  — её коэффициенты Фурье. Докажите сходимость ряда  $\sum (a_n^2 + b_n^2)n^2$ .
8. Пусть  $f \in C^k(\mathbb{R})$  —  $2\pi$ -периодическая функция,  $a_n, b_n$  — её коэффициенты Фурье. Докажите, что  $a_n = o(1/n^k)$ ,  $b_n = o(1/n^k)$  при  $n \rightarrow \infty$ .
9. Пусть  $f \in C^1(\mathbb{R})$  —  $2\pi$ -периодическая функция. Докажите, что ряд Фурье функции  $f$  сходится к ней равномерно.
10. Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая локально интегрируемая функция,  $b_n$  — коэффициенты Фурье (при  $\sin(nx)$ ) функции  $f$ . Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{n}$  сходится.
11. Постройте пример почти всюду сходящегося тригонометрического ряда, который не является рядом Фурье никакой функции ( $2\pi$ -периодической локально интегрируемой).
12. Пусть  $f \in C^1(\mathbb{R})$  —  $2\pi$ -периодическая функция, причём  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0$ . Докажите неравенство  $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx \leq \int_0^{2\pi} (f'(x))^2 dx$ .
13. Пусть  $f \in C^1[0, \pi]$  и  $f(0) = f(\pi) = 0$ . Докажите неравенство  $\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$ .
14. Пусть  $f \in C^1[0, \pi]$  и  $f(0) = -f(\pi)$ . Докажите неравенство  $\int_0^\pi f^2(x) dx \leq \int_0^\pi (f'(x))^2 dx$ .
15. Пусть  $f$  —  $2\pi$ -периодическая локально интегрируемая функция. Докажите, что если все коэффициенты Фурье функции  $f$  равны 0, то  $f(x) = 0$  почти всюду.